数理解析研究所講究録
第 1710 巻 2010 年 199-204

Interpolation of Multiple Harmonic Sums and Relations among Multiple Zeta Values

川島学（名古屋大学多元数理科学研究科）

1 多重ゼータ値の定義

$\boldsymbol{\mu}=(\mu_1,\ldots,\mu_p)$, $\mu_i\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$ とする. $\mu_1\geq 2$ のとき

$$\zeta(\boldsymbol{\mu}):=\sum_{n_1>\cdots>n_p>0}\frac{1}{n_1^{\mu_1}\cdots n_p^{\mu_p}},$$
$$\bar{\zeta}(\boldsymbol{\mu}):=\sum_{n_1\geq\cdots\geq n_p>0}\frac{1}{n_1^{\mu_1}\cdots n_p^{\mu_p}}$$

と定義する. 又,

$$\zeta^+(\boldsymbol{\mu}):=\zeta(1+\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_p),$$
$$\bar{\zeta}^+(\boldsymbol{\mu}):=\bar{\zeta}(1+\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_p)$$

と定義する.

2 有限多重和の補間

$\mathbb{N}:=\{0,1,2,\ldots\}$. 数列 $a\colon\mathbb{N}\to\mathbb{C}$ に対して, その差分と反転を

$$(\Delta a)(n)=a(n)-a(n+1)\quad(n\in\mathbb{N}),$$
$$(\nabla a)(n)=(\Delta^n a)(0)\quad(n\in\mathbb{N})$$

で定義する. 数列

$$s_1(n)=\frac{1}{n+1}\quad(n\in\mathbb{N}),$$
$$s_2(n)=\frac{1}{(n+1)^2}\quad(n\in\mathbb{N})$$

の反転を計算してみよう.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & \nabla s_1 & & & & & \\
 & & \downarrow & & & & & \\
s_1 & \to & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots \\
\Delta s_1 & \to & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{20} & \cdots & \\
\Delta^2 s_1 & \to & \frac{1}{3} & \frac{1}{12} & \frac{1}{30} & \cdots & & \\
\Delta^3 s_1 & \to & \frac{1}{4} & \frac{1}{20} & \cdots & & & \\
\Delta^4 s_1 & \to & \frac{1}{5} & \cdots & & & & \\
 & & \vdots & & & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & \nabla s_2 & & & & & \\
 & & \downarrow & & & & & \\
s_2 & \to & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{9} & \frac{1}{16} & \frac{1}{25} & \cdots \\
\Delta s_2 & \to & \frac{3}{4} & \frac{5}{36} & \frac{7}{144} & \frac{9}{400} & \cdots & \\
\Delta^2 s_2 & \to & \frac{11}{18} & \frac{13}{144} & \frac{47}{1800} & \cdots & & \\
\Delta^3 s_2 & \to & \frac{25}{48} & \frac{77}{1200} & \cdots & & & \\
\Delta^4 s_2 & \to & \frac{137}{300} & \cdots & & & & \\
 & & \vdots & & & & &
\end{array}
$$

∇s_1 は s_1 だろうと推測される. ∇s_2 は何だろうか? 調和級数の値

$$
1, \quad 1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}, \quad 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{11}{6}, \quad 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{25}{12},
$$
$$
1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{137}{60}
$$

を見ると,

$$
(\nabla s_2)(n) = \frac{1}{n+1}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n+1}\right) \quad (n \in \mathbb{N})
$$

が推測される. 実際これらのことは正しく, さらに次のように一般化される. 多重指数 $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_p)$ $(\mu_i \in \mathbb{Z}_{\geq 1})$ に対して

$$
s_{\boldsymbol{\mu}}(n) := \sum_{n+1=n_1 \geq \cdots \geq n_p > 0} \frac{1}{n_1^{\mu_1} \cdots n_p^{\mu_p}} \quad (n \in \mathbb{N})
$$

と定義するとき,

$$
\nabla s_{\boldsymbol{\mu}} = s_{\boldsymbol{\mu}^*}.
$$

多重指数 $\boldsymbol{\mu}^*$ は次のように計算される:

$$
\begin{array}{ccccc}
 & 1 & 2 & 1 & 1 \\
2 & \bigcirc & \bigcirc & & \\
3 & & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccc}
 & 1 & 2 & 2 \\
2 & \bigcirc & \bigcirc & \\
2 & & \bigcirc & \bigcirc \\
1 & & & \bigcirc
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccc}
 & 2 & 1 & 2 \\
1 & \bigcirc & & \\
3 & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \\
1 & & & \bigcirc
\end{array}
$$

より,

$$(2,3)^* = (1,2,1,1), \quad (2,2,1)^* = (1,2,2), \quad (1,3,1)^* = (2,1,2).$$

ところで, 数列 $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ に対して

$$(\nabla a)(n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a(k) \binom{n}{k} \quad (n \in \mathbb{N})$$

である. 従って,

$$s_{\boldsymbol{\mu}}(n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k s_{\boldsymbol{\mu}^*}(k) \binom{n}{k} \quad (n \in \mathbb{N}) \tag{1}$$

である. そこで, 複素変数 z をもつ級数

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k s_{\boldsymbol{\mu}^*}(k) \binom{z}{k}$$

を考えてみる. この級数は $\mathrm{Re}\, z > -\mu_1^*$ で広義一様収束する. ここで, $\boldsymbol{\mu}^* = (\mu_1^*, \mu_2^*, \ldots)$. 等式 (1) によれば, この級数の $z = n \in \mathbb{N}$ での値は $s_{\boldsymbol{\mu}}(n)$ である. つまり数列 $\{s_{\boldsymbol{\mu}}(n)\}_{n=0}^{\infty}$ を補間する. よって, この級数を $s_{\boldsymbol{\mu}}(z)$ と書くことにしよう. もし $\mu_1^* \geq 2$ ならば

$$s_{\boldsymbol{\mu}}(-1) = \sum_{k=0}^{\infty} s_{\boldsymbol{\mu}^*}(k) = \bar{\zeta}(\boldsymbol{\mu}^*)$$

である. この関数について調べることにより多重ゼータ値の研究をしよう, というのが本研究の基本的な発想である. 関数 $s_{\boldsymbol{\mu}}(z)$ を少し変形しておく:

$$S_{\boldsymbol{\mu}}(z) := z s_{1,\boldsymbol{\mu}}(z-1).$$

この関数は $z = n \in \mathbb{N}$ で値

$$S_{\boldsymbol{\mu}}(n) = n s_{1,\boldsymbol{\mu}}(n-1) = \sum_{n \geq n_1 \geq \cdots \geq n_p > 0} \frac{1}{n_1^{\mu_1} \cdots n_p^{\mu_p}}$$

をとり,

$$S'_{\boldsymbol{\mu}}(0) = s_{1,\boldsymbol{\mu}}(-1) = \bar{\zeta}^{+}(\boldsymbol{\mu}^*)$$

をみたす. 実は一般に $S_{\boldsymbol{\mu}}^{(k)}(0)$ $(k \geq 1)$ は多重ゼータ値の整数係数の線形結合である.

3 多重ゼータ値の関係式を得る一つの方法

$\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\nu}$ を $l(\boldsymbol{\mu}) = |\boldsymbol{\nu}|$ なる多重指数とする. ここで $l(\boldsymbol{\mu})$ は $\boldsymbol{\mu}$ の長さ, $|\boldsymbol{\nu}|$ は $\boldsymbol{\nu}$ の重さである. 唐突であるが, 関数 $G_{\boldsymbol{\mu};\boldsymbol{\nu}}(z)$ を次のように定義する: 例えば

$\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_5)$ に対して,

$$G_{\boldsymbol{\mu};3,2}(z) = \sum_{n_1>n_2>n_3\geq n_4>n_5\geq 1} \underbrace{\left\{\frac{1}{n_1^{\mu_1}} - \frac{1}{(n_1+z)^{\mu_1}}\right\} \frac{1}{n_2^{\mu_2} n_3^{\mu_3}}}_{3}\underbrace{\frac{1}{(n_4+z)^{\mu_4} n_5^{\mu_5}}}_{2},$$

$$G_{\boldsymbol{\mu};1,1,3}(z) = \sum_{n_1\geq n_2\geq n_3>n_4>n_5\geq 1} \underbrace{\left\{\frac{1}{n_1^{\mu_1}} - \frac{1}{(n_1+z)^{\mu_1}}\right\}}_{1} \underbrace{\frac{1}{(n_2+z)^{\mu_2}}}_{1}\underbrace{\frac{1}{(n_3+z)^{\mu_3} n_4^{\mu_4} n_5^{\mu_5}}}_{3}.$$

値 $G'_{\boldsymbol{\mu};\boldsymbol{\nu}}(0)$ が多重ゼータ値の整数係数の線形結合であることは容易に分かる. 一般に $G^{(k)}_{\boldsymbol{\mu};\boldsymbol{\nu}}(0)$ $(k \geq 1)$ は多重ゼータ値の整数係数の線形結合である. 再び唐突であるが, 関数 $G_{\boldsymbol{\mu};\boldsymbol{\nu}}(z)$ は前節で導入した関数 $S_{\boldsymbol{\mu}}(z)$ を使って書くことができるようである.

予想 関数 $G_{\boldsymbol{\mu};\boldsymbol{\nu}}(z)$ は $S_{\boldsymbol{\lambda}}(z)\zeta(\boldsymbol{\kappa})$ $(|\boldsymbol{\lambda}| + |\boldsymbol{\kappa}| = |\boldsymbol{\mu}|)$ たちの整数係数の線形結合であろう.

実際, 数値実験によって次の表を得る.

重さ 1

	S_1
$G_{1;1}$	1

重さ 2

	$S_{1,1}$	S_2
$G_{1,1;2}$	1	0
$G_{1,1;1,1}$	0	1
$G_{2;1}$	0	1

重さ 3

	$S_{1,1,1}$	$S_{2,1}$	$S_{1,2}$	S_3	$S_1\zeta(2)$
$G_{1,1,1;3}$	1	0	0	0	0
$G_{1,1,1;2,1}$	0	1	0	0	0
$G_{1,1,1;1,2}$	0	0	1	0	0
$G_{1,1,1;1,1,1}$	0	0	0	1	0
$G_{1,2;2}$	0	-1	0	0	1
$G_{2,1;2}$	0	1	1	0	-1
$G_{1,2;1,1}$	0	0	1	1	-1
$G_{2,1;1,1}$	0	-1	-1	1	1
$G_{3;1}$	0	0	0	1	0

重さ 4

	$S_{1,1,1,1}$	$S_{2,1,1}$	$S_{1,2,1}$	$S_{1,1,2}$	$S_{3,1}$	$S_{2,2}$	$S_{1,3}$	S_4	$S_{1,1}\zeta(2)$	$S_1\zeta(2,1)$	$S_2\zeta(2)$	$S_1\zeta(3)$	
$G_{1,1,1,1;4}$	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	(2)
$G_{1,1,1,1;3,1}$	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
$G_{1,1,1,1;2,2}$	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
$G_{1,1,1,1;1,3}$	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	
$G_{1,1,1,1;2,1,1}$	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	
$G_{1,1,1,1;1,2,1}$	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	
$G_{1,1,1,1;1,1,2}$	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	
$G_{1,1,1,1;1,1,1,1}$	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	
$G_{1,1,2;3}$	0	0	−1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	(3)
$G_{1,2,1;3}$	0	−1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	(4)
$G_{2,1,1;3}$	0	1	1	1	0	0	0	0	−1	−1	0	0	(5)
$G_{1,1,2;2,1}$	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	−1	0	
$G_{1,2,1;2,1}$	0	−1	−1	0	0	0	0	0	0	0	0	2	
$G_{2,1,1;2,1}$	0	0	1	0	−1	1	0	0	0	0	1	−2	
$G_{1,1,2;1,2}$	0	1	0	0	−1	−1	0	0	0	0	1	0	
$G_{1,2,1;1,2}$	0	0	1	2	−1	0	1	0	−2	0	1	−1	
$G_{2,1,1;1,2}$	0	−1	−2	−2	2	1	1	0	2	0	−2	1	
$G_{1,1,2;1,1,1}$	0	0	0	1	1	−1	1	1	−1	0	−1	0	
$G_{1,2,1;1,1,1}$	0	0	0	−2	−2	2	0	1	2	0	1	−2	
$G_{2,1,1;1,1,1}$	0	0	0	1	0	−2	−1	1	−1	0	0	2	
$G_{1,3;2}$	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	−1	1	(6)
$G_{2,2;2}$	0	0	0	0	−2	−1	0	0	0	0	2	0	(7)
$G_{3,1;2}$	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	−1	−1	(8)
$G_{1,3;1,1}$	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	−1	−1	
$G_{2,2;1,1}$	0	0	0	0	−2	−2	0	1	0	0	2	0	
$G_{3,1;1,1}$	0	0	0	0	1	0	−1	1	0	0	−1	1	
$G_{4;1}$	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	

例えば, 重さ 4 においては関数 $G\boldsymbol{\mu};\boldsymbol{\nu}(z)$ は 27 個あり, それらは 12 個の $S_{\boldsymbol{\lambda}}(z)\zeta(\boldsymbol{\kappa})$ の整数係数線形結合として書かれている. 従って, 関数 $G_{\boldsymbol{\mu};\boldsymbol{\nu}}(z)$ たちの間に 15 個以上の線形関係式が生じる. 原点での微分係数を見ることにより, 我々は 15 個以上の多重ゼータ値の線形関係式を得る. もちろん, これらは独立な関係式ではない. さて, このような方法でどれぐらいの多重ゼータ値の関係式を得ることができるだろうか? 関係式の個数に関して何らかの評価を得ることはできないだろうか?

4　微分作用素の多重ポリログ

多重指数 $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_p)$ に対して

$$\mathrm{Li}_{\boldsymbol{\mu}}(X) := \sum_{n_1 > \cdots > n_p > 0} \frac{X^{n_1}}{n_1^{\mu_1} \cdots n_p^{\mu_p}} \in \mathbb{C}[[X]],$$

$$m_{\boldsymbol{\mu}}(X) := \sum_{n=0}^{\infty} s_{\boldsymbol{\mu}}(n) \frac{X^n}{n!} \in \mathbb{C}[[X]]$$

とする. $D := d/dX$ として $\mathrm{Li}_{\boldsymbol{\mu}}(D)m_{\boldsymbol{\nu}}(X)$ を計算してみよう. 例えば,

$$\mathrm{Li}_{1,1,1}(D)m_1(X) = m_{1,1,1,1}(X), \tag{2$'$}$$

$$\mathrm{Li}_{1,2}(D)m_1(X) = -m_{1,2,1}(X) + m_{1,1}(X)\zeta(2), \tag{3$'$}$$

$$\mathrm{Li}_{2,1}(D)m_1(X) = -m_{2,1,1}(X) + m_1(X)\zeta(2,1), \tag{4$'$}$$

$$\mathrm{Li}_{1,1}(D)m_2(X) = m_{2,1,1}(X) + m_{1,2,1}(X) + m_{1,1,2}(X) - m_{1,1}(X)\zeta(2) - m_1(X)\zeta(2,1), \tag{5$'$}$$

$$\mathrm{Li}_3(D)m_1(X) = m_{3,1}(X) - m_2(X)\zeta(2) + m_1(X)\zeta(3), \tag{6$'$}$$

$$\mathrm{Li}_2(D)m_2(X) = -2m_{3,1}(X) - m_{2,2}(X) + 2m_2(X)\zeta(2), \tag{7$'$}$$

$$\mathrm{Li}_1(D)m_3(X) = m_{3,1}(X) + m_{2,2}(X) + m_{1,3}(X) - m_2(X)\zeta(2) - m_1(X)\zeta(3). \tag{8$'$}$$

明らかに (2) – (8) と (2′) – (8′) の対応が見て取れる. この対応をもっと一般化できないだろうか?